熊本県教育委員会賞

半球プリズムに映る像の謎を解明！～屈折率の研究Ⅳ～

熊本県立　宇土高等学校　科学部物理班

要旨

我々は，2017 年に透明半球容器に水を満たした際，水面の縁部分だけが中心部と異なる全反射する層（Z ゾーンと呼ぶ）を発見した。昨年度までに，（曲率半径 R の半球容器全体に媒質を満たしたときの Z ゾーンの幅 z は，屈折率や濃度が求まることを突き止め（$n=R/(R-z)$），さらに，Z ゾーン内に数本見えるひと際強い明線の形成要因の特定や，濃度の自動測定を実現するカメラアプリの開発にまでたどり着くことができた。今回，Z ゾーンの内側に薄っすらと映る像が複数あることがわかった。これらの像が実像なのか虚像なのか，どのようなしくみで映っているのかを水を張った透明半球容器で調べ，半球プリズム自体に映る像のモデル化を行うことを目的とした。実験方法は，すりガラスを半球容器内の水中に沈め，像が映るかを確認し，実像の際は像の出現位置を測定した。また，シミュレーションソフト GeoGebra による検証も行った。実験の結果から，半球プリズムには，鏡のように映る虚像と，水中に結像する実像があることがわかった。特に，半球プリズムの平面部の実像が映るゾーンは，Z ゾーンを含め4つの層で構成されていることがわかった。中心から Z ゾーンに向かってそれぞれ A，B，C，Z ゾーンとした。A，Z ゾーンは，上面から入射した光線が球面で透過・反射または全反射し，その反射光が結像し，また，B，C ゾーンは側面の球面から光線が入射し，上面全反射後または直接，球面で反射して結像していることがわかった。主実像以外にも実像が存在することから，これらの像は，本校の先行研究で明らかにした“副実像”であるとも言える。これら全ての実像は水中で結像するため屈折率によって浮き上がり現象も見られることもわかった。以上より，これまでに知られていなかった新たな知見が得られ，半球プリズム自体に映る像のモデル化に成功した。また，半球プリズムの中心（A ゾーン）に映る実像の位置の数式化にも成功したことから，今後，Z ゾーン幅と，浮き上がりによる像の拡大両面から屈折率の精度をさらに高められると考えている。

これまでの研究(3年間)

昨年度までの成果①(2017年８月～１０月)

半球容器に水を満たしたとき、周辺部に全反射のゾーンが出現することを確認。

$$n=\frac{R}{a}=\frac{R}{R-Z}$$

様質	水（液体）	アガー（ゲル）	アクリル（固体）
曲率半径R（mm）	50		
屈折率n 真値	1.333	—	1.49
平均(mm)Z	12.50	12.72	16.44
屈折率n（測定値）	1.3335	1.3410	1.4899
誤差(%)	0.01	—	0.004

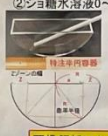
このZゾーンの幅は媒質の屈折率に関係していることを突き止めた（世界初！）

昨年度までの成果②(2018年１月～１０月)

特注半円容器で…

①画像解析(ImageJ)を用いて幅Zの測定

②ショ糖水溶液0～50wt%(5%毎)で幅Zを測定



	ImageJ	カーボンノギス
曲率半径(mm)	50	
媒質	水	
屈折率(理論値)	1.333	
Z(mm)	12.8005	12.3733
屈折率(測定値)	1.3334	1.3288
標準偏差	0.04589	0.3642
誤差(%)	0.0293	0.0669
精度約12倍		

画像解析によって精度最大約12倍も向上！
特注容器で簡単かつ正確に測定可能に！
Zゾーン幅と媒質の濃度の関係性が明らかに！

昨年度までの成果③(2019年１月～１０月)

①明線及びZゾーンの出現原理の全容解明

②屈折率を自動で測定することができるアプリの開発

アプリでの測定の様子

測定方法	ImageJ	アプリ
媒質	水	
屈折率（理論値）	1.33299	
屈折率（測定値）	1.33299	1.33230
相対誤差（%）	0.0538144	0.0528682
標準偏差:SD	0.0015475	0.0052381
測定時間(/回)	約120～150m	約5～10m

Zゾーンは反射回数の異なる層によって形成！
アプリで正確に簡単に測定可能！

目的

はじめに

半球容器を水で満たし、物体を近づけると不思議な現象が…

今年度の目的

半球プリズム内に映る像の解明

1.映る像は実像か？または虚像か？

2.どのような光が像を形成しているのか

研究期間:2020年7月～10月

実験1・2及び結果

実験1 ＜半球プリズムに映る像の検証＞

〔方法〕

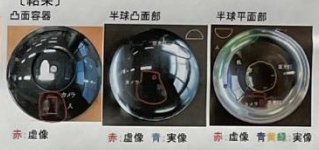
①凸面容器を用いて半球に映る虚像の位置を特定する

②特定した虚像と半球プリズム内に映る像を比較する

実験1 凸面容器

虚像かどうかを虚像パターンと比較して決定

〔結果〕



媒質中には虚像と実像が重なって出現している！

実験2 ＜像を構成する位置の測定＞

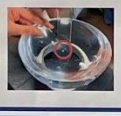
〔結果〕

半球プリズム内には4種類の実像が出現！

〔方法〕

①水を満たした半球容器(R=50mm)に物体をかざす。

②その像がスクリーンに映るか検証する。



〔結果〕

曲率半径R[mm]	50
像の出現位置[mm]	25.28
標準偏差:SD	1.64
標準誤差:SE	0.37

N=20× 2set 計 40 回測定

考察Ⅰ

考察Ⅰ ＜像を構成する位置の測定＞

「新たな問い」

①像を構成する光はどのように進む？

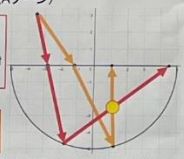
⇒シミュレーションソフトGeoGebraで再現！

②A像は半球のどの位置に出現する？

⇒光線追跡を用いた写像公式から特定！

GeoGebraとは？
・幾何と代数を掛け合わせた動的数学ソフトウェア
・数式を用いた物理現象のシミュレーションが可能！

光路図(Aゾーン)



平面入射
⇒透過
⇒曲面反射
⇒結像

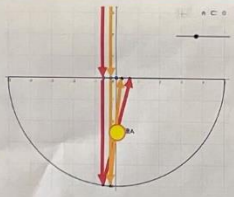
実像が映ることを再確認！

A～Z ゾーン全ての実像が媒質中で結像することを確認できた！

光路図(Aゾーン)

Aゾーンのみ結像位置が1点に収束！

副実像が出現している！



システム行列による光線追跡で写像公式を導出

$$\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

転透　球面反射　転透　平面入射

$$=\begin{pmatrix} 1-\frac{2d}{R} & \frac{2d}{n}-\frac{2d^2}{nR} \\ -\frac{2}{R} & -\frac{2d}{nR}+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$d=R$より

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C' & D' \\ A' & B' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1-\frac{2b}{R} & -a-\frac{2ab}{R}-\frac{b}{n} \\ -\frac{2}{R} & -\frac{2a}{R}-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

結像条件D'＝0より $\boxed{\frac{1}{a}+\frac{n}{b}=-\frac{2n}{R}}$

像の出現位置bは $a\to\infty$とすると $\boxed{b=-\frac{R}{2}}$

R=50m のとき実験値と一致

追加実験

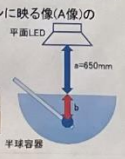
追加実験Ⅰ ＜Aゾーン写像公式の検証＞

〔実測〕

①水を満たした半球容器の真上に光源を設置する

②すりガラスを用いてAゾーンに映る像(A像)の出現位置を測定する

〔準備物〕
・半球容器(R=50,75,100,125mm)
・光源(平面LED)



〔結果〕媒質:水(屈折率n:1.333)

N=20× 2set 計 160 回

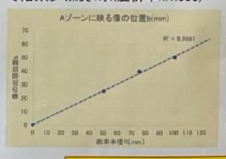
曲率半径R[mm]	50	75	100	125
像の出現位置[mm]	25.29	39.81	50.39	54.81
標準偏差:SD	1.41	1.11	2.60	12.41
標準誤差:SE	0.31	0.25	0.58	*2.78
R(測定値)[mm]	52.09	83.45	107.00	117.02
測定誤差	4.18%	11.27%	7.00%	6.38%

・像の出現位置bはR/2に近い
・bから導かれるRの誤差が小さい

*他のデータより1.5倍以上のSE誤差となった場合は外れ値として処理

写像公式の導出・結像位置の特定に成功！

〔結果〕媒質:水(屈折率n:1.333)



Rとbに相関が見られる！

$$b=\frac{R}{2}$$

式が正しいことを証明できた！

実験値 d=25.275±0.314mm(SE) と一致！

追加実験Ⅱ ＜写像公式と屈折率の関係の検証＞

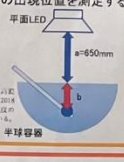
〔実測〕

①ショ糖水溶液(0～30wt%)で半球容器を満たす

②追加実験Ⅰと同様にA像の出現位置を測定する

〔準備物〕
・半球容器(R=50mm)
・光源(平面LED)
・上白糖(ショ糖97.8%)*

*ショ糖水溶液は比較まで溶けやすく、2018年度に結晶サビと濃度の関係を明にできている。



追加実験Ⅱ ＜写像公式と屈折率の関係の検証＞

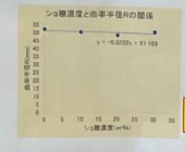
〔結果〕媒質:ショ糖水溶液(0～30wt%) R=50mm

ショ糖濃度	0%	10%	20%	30%
像の出現位置[mm]	25.29	24.55	23.84	25.20
標準偏差:SD	1.41	2.45	0.62	1.14
標準誤差:SE	0.31	0.55	0.14	0.25
R(測定値)[mm]	52.09	50.51	48.98	51.86
測定誤差	4.18%	1.02%	2.03%	3.71%

像の出現位置bと曲率半径Rは一定！

追加実験Ⅱ ＜写像公式と屈折率の関係の検証＞

〔考察〕媒質:ショ糖水溶液

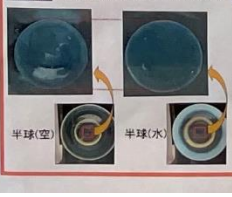


濃度によらず曲率半径が一定

像の出現に屈折率は影響しない！

考察Ⅱ

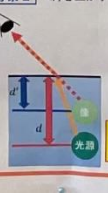
考察Ⅱ ＜浮き上がりの像と屈折率の関係＞



考察Ⅱ ＜浮き上がりの像と屈折率の関係＞

$$d'=\frac{1}{n}d$$

光の屈折によって像は光源の位置より浮き上がって見える



半球プリズム内の実像でも同様の現象が起きている！

結論

・半球プリズムに多数の実像・虚像が出現している

・特に平面側には4種類の実像が出現している

・A像は副実像であり、写像公式化に成功！

・像の出現に屈折率は影響しない！

・半球内の像には浮き上がり現象がみられる

Zゾーン幅と，浮き上がりによる像の拡大の両面から屈折率の精度をさらに高められる可能性

謝辞・参考文献

〔謝辞〕

本研究を行うにあたって本校科学部顧問の

梶尾海空先生にご指導・ご助言をいただきました。

感謝申し上げます

〔参考文献〕

[1] 第14回 2017日本物理学会 Jr.セッション 23JPSA-14「液体の屈折率の研究 ～簡単な測定法の発見～」

[2] 情報処理学会2019中高生情報学研究コンテスト#60「新たな物理原理を活用した水溶液濃度測定アプリケーションの開発」

[3] 科学技術チャレンジJSEC2017論文（本校HPに掲載）